られるが，その間隔は束縛状態のポテンシャル極小値とよく一致している。さらに小さいδに対するパルス間隔のふらつきは，束縛領域内での運動に対応していることも分る。

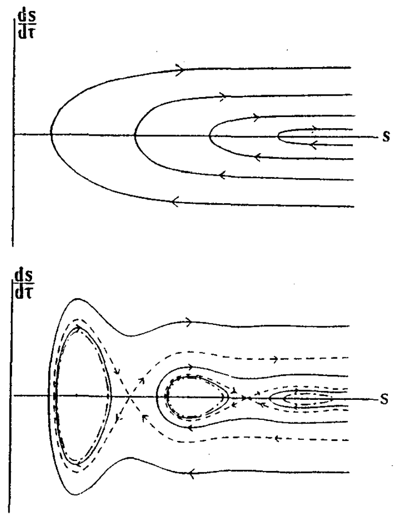

図 2

4. まとめ

初期値問題の解の振舞を基本的なパルス解の相互作用によって説明する試みの一部について述べた。分散性が比較的強い場合には，弱い相互作用の近似が初期値問題の解の性質を定性的に良く示すと言える。

ここで述べたのは2パルスの積分可能な場合であるが，3個以上のパルスの相互作用は，一般に非対称な力を受ける非線形格子の運動方程式で記述される。束縛状態をもつ場合に自由度（パルス個数）の大きい系の解が，カオス的性質を示すか否か，また，そのような近似方程式系で初期値問題におけるカオス的振舞をどの程度まで記述できるかということも問題であり検討しつつある。

弱い相互作用の近似では，分散性が非常に弱い場合の生成・消滅を伴なうカオスまでは記述できないように思われる。今の近似の適用限界を明らかにすること，時間変動の激しいカオスにおいても局所的な構造が存在することを利用して自由度を逓減し，連続自由度系のカオスを有限自由度で論ずる試みなどは今後の課題である。

大自由度力学系のマクロダイナミクス

京大・理　西川郁子，蔵本由紀

§ 問題意識・模型

自由度が大きい散逸力学系において，巨視的状態を記述する変数のダイナミクスを取り出すことを考えたい。その一範例として，解析的な取り扱いが可能な位相模型に対して得られた結果を報告した。

自然振動数が分布した多数の振動子が位相で相互に結合し，その結果統計的引き込み転移を示す次のような平均場模型；

$$\dot{\phi}_i = \omega_i - N^{-1} K \sum_{j=1}^{N} \sin(\phi_i - \phi_j) \tag{①}$$

$$i = 1, 2, \cdots\cdots, N,$$

を考える。ここで，振動数分布 $g(\omega) = N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \delta(\omega_j - \omega)$ は，ある $\omega = \Omega_0$ に関して対称なものであるとする。このとき，系が示す巨視的挙動を記述するものとして，次の複素秩序変数

$$Z = |Z| e^{i\Theta} = N^{-1} \sum_{j=1}^{N} e^{i\phi_j}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi\, n(\phi, t) e^{i\phi} \tag{②}$$

を定義する。ただし，$n(\phi, t) = N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \delta(\phi_j(t) - \phi)$ は位相分布関数である。この Z により，①式は，形式的に一体化し

$$\dot{\phi}_i = \omega_i - K|Z| \sin(\phi_i - \Theta)$$

に帰着される。更に，$\varphi_i = \phi_i - \Omega_0 t$，$\theta = \Theta - \Omega_0 t$ を用いて，以後，基礎方程式として，

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i - \Omega_0 - K|Z| \sin(\varphi_i - \theta) \tag{①$'$}$$

を扱う。

§ 定常状態

Z が時間に依らない定常状態においては，振動子は次の2グループに明確に分離される。それに応じて，分布関数及び秩序変数は両グループからの寄与の和で，

$$n = n_s + n_d \ , \qquad Z = Z_s + Z_d$$

と書かれる。

・引き込まれた振動子集団（sグループ）；$\left| \dfrac{\omega_i - \Omega_0}{KZ} \right| \leq 1$ を満たすもの

この場合，各振動子は，①$'$ の定常解として，1つの安定な固定点

$$\varphi_{i_0}(Z) = \theta + \sin^{-1}\left(\frac{\omega_i - \Omega_0}{K|Z|}\right)$$

を持つ。その結果全体として，平衡な位相分布

$$n_{s_0}(\phi\ ;\ Z) = g(K|Z|\sin(\phi-\theta)+\Omega_0)K|Z|\cos(\phi-\theta)$$

を形成する。

・引き込まれていない振動子集団（d グループ）；$\left|\dfrac{\omega_i-\Omega_0}{KZ}\right|>1$　を満たすもの

各振動子は固定点を持たないために，一方向へ角速度 $v_i(\phi_i)=\dot{\phi}_i$ で独立に回転し続ける。ただし相互作用の結果，角振動数は ω_i から変更され　$\widetilde{\omega}_i=2\pi/\int_0^{2\pi/\omega_i}\mathrm{d}t$ $=\sqrt{(\omega_i-\Omega_0)^2-|KZ|^2}$ となる。これによる高次元トラース上のエルゴード運動に基づく不変測度が物理的にも実現する平衡状態を与えると考えられる。これより

$$n_{d_0}(\phi\ ;\ Z)=\frac{1}{\pi}\int_{\Omega_0+K|Z|}^{\infty}\mathrm{d}\omega\, g(\omega)\ \frac{\omega\sqrt{(\omega-\Omega_0)^2-|KZ|^2}}{(\omega-\Omega_0)^2-|KZ\sin(\phi-\theta)|^2}$$

を得る。両者を②の定義式へ代入することにより，最終的に Z に対する自己無撞着方程式：

$$\begin{aligned}Z &= S(Z)\\ &=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\, n_{s_0}(\phi\ ;\ Z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\\ &=(1+\varepsilon)Z-\beta|Z|^2Z+O(|Z|^5)\end{aligned}$$

$$\varepsilon=\frac{K-K_c}{K_c}\ ,\quad K_c=\frac{2}{\pi g(\Omega_0)}\ ,\quad \beta=-\frac{\pi}{16}K_c^3\,g''(0)$$

が導かれる。この解は，常に存在する自明の $Z=0$ の他に，有限振幅解が $K=K_c$ で分岐し，特に $\beta>0$ の場合

$$Z=(\varepsilon/\beta)^{1/2}\,\mathrm{e}^{i}\qquad(\text{for }\varepsilon\gtrsim 0)$$

で与えられる。

§ 動 的 拡 張

Z が時間的に変化する場合にも，上述の自己無撞着的考察を拡張することで，その動的挙動

を記述する発展方程式が以下のように得られる。

臨界点近傍（$\varepsilon \ll 1$）に限定すると，Zの運動はゆっくりしたものとなり，個別振動子の運動と時間スケールにおいて明確に分離されるために巨視変数のみで閉じた記述が可能となる。更に定常状態からのズレが小さい場合を考えると，定常状態と類似した描像が成立する。即ち，2グループにほぼ分離され（この点における議論の精密化は別の機会にゆずる。），Zへの寄与もやはりその和で表される。その際，Zの変動の効果は，各グループで次のように取り入れらえることになる。

・sグループ

Zの運動がゆっくりしたものであることに対する第0近似として，個別振動子が断熱的にZに追随するとしてみる。この取り扱いからは定常状態を与える方程式が得られるのみで，異なる時刻の挙動を結びつける発展方程式とはなり得ない。そこで，次の近似として，非断熱効果を小さいがしかし有限であるとして考慮し，それによる第0近似解$\phi_{i_0}(Z(t))$からのズレについて線形化する。若干の変形及び作業仮設の後，得られる解は

$$\phi_i(t) \simeq \phi_{i_0}(\overline{Z}^i)$$

という表式となる。これは，各振動子の緩和時間が有限であるため，各々がほぼその時間にわたって平均した量$\overline{Z}^i$を実効的な場として感じ，これに対して引き込まれることを示している。これらより形成されるZ_sは，更に，緩和時間の振動子依存性をも平均した量$\overline{Z}$を定義することにより，最終的に次式で与えられる；

$$Z_s = S(\overline{Z})$$

・dグループ

この集団に対しても全く同様の考察がなされ，その結果Zへの直接の寄与は無視できることがわかる。

以上より，求める発展方程式は

$$Z = S(\overline{Z})$$

或いは，平均量$\overline{Z}$を決める時間スケールが$O(|KZ|^{-1})$であるので，これより長い時間に対してはマルコフ近似を用い，よりあらわな微分方程式の形で

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}|KZ|^{-1} \simeq \epsilon Z - \beta |Z|^2 Z$$

と書ける。これより，例えば定常解の安定性，及びそこへの緩和が次のように得られる。

	安定定常解 Z_{st}	ズレ $\eta(t) \equiv Z(t) - Z_{st}$ の時間緩和
$\varepsilon < 0$	$Z_{st} = 0$	$\eta \sim \dfrac{1}{\lvert\varepsilon\rvert t}$
$\varepsilon > 0$	$Z_{st} = (\varepsilon/\beta)^{1/2} e^{i\Theta}$	$\eta \sim e^{-c\varepsilon^{3/2} t}$

このように通常よりごくゆっくりした緩和特性である。これは，Zの運動の時間スケールそのものがZに依存し，$(KZ)^{-1}$という大きな慣性をもつことに起因している。

§ ‵揺動′の取り扱い

dグループからのZへの直接の寄与Z_dは無視できたが，Z_dが揺動力として特にZの低周波成分に及ぼす効果は無視できない。

まず，揺動項としてのZ_dの，定常状態における統計的性質を，前述の平衡不変測度を使って求める。この不変測度はあくまで，一定値をとる秩序変数に対して与えられるものであるが，ここでは揺動の議論に際しても近似的に成立する測度として用いるわけである。Z_dの平均値は当然ゼロであり，また振動数スペクトラム$F(\omega)$は次の形で得られることがわかる；

$$\varepsilon < 0 \quad ; \quad F(\omega) \simeq \frac{1}{N} g(\omega)$$

$$\varepsilon > 0 \quad ; \quad F(\omega) \simeq \begin{cases} \dfrac{1}{N} G_d(\omega) & \left(\left| \dfrac{\omega}{KZ} \right| \gg 1 \right) \\ \dfrac{b}{N} \omega^2 & \left(\left| \dfrac{\omega}{KZ} \right| \ll 1 \right) \qquad b \equiv \dfrac{g(\Omega_0)}{|KZ|^2} \displaystyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^3} \end{cases}$$

ここで$G_d(\omega)$は，相互作用の結果変更された角振動数$\tilde{\omega}$の分布関数である。

先に求めた発展方程式でのダイナミクスにおいても，揺動としてのdグループの効果を取り入れることを考える。これは即ち，揺動として$O(\frac{1}{\sqrt{N}})$で常に存在するdグループの直接効果のみならず，更にsグループがこれを感じることによる2次的効果をも考慮するわけである。これは，臨界揺動における低周波成分が成長する上で，不可欠な機構となる。ただし，やはり先の不変測度の枠組み内で考え，Z_dの統計的性質も定常状態のまわりでの揺動に対して求めたもので近似することにする。

Zの振幅・位相各々の臨界揺動に対して，振動数空間における次の表式が得られる；

$$\begin{cases} \eta(\omega) - \overline{\eta}(\omega) = -C_\varepsilon |\varepsilon| \overline{\eta}(\omega) + f_R(\omega), \quad C_\varepsilon = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} (\varepsilon \gtrless 0) \\ \Theta(\omega) - \overline{\Theta}(\omega) = \dfrac{1}{R} \cdot f_I(\omega) \end{cases}$$

$$f_{\substack{R\\I}}(t) \equiv \substack{\mathrm{Re}\\\mathrm{Im}}(Z_d e^{-i\Theta}), \quad f_{\substack{R\\I}}(\omega) = \frac{1}{2} F(\omega)$$

$$\overline{A}(\omega) \equiv A(\omega)\Pi_s(\omega), \quad \Pi_s(\omega) \simeq \begin{cases} 1 - \alpha \dfrac{i\omega}{K|Z|} & \left(\left|\dfrac{\omega}{KZ}\right| \gg 1\right) \\ 0 & \left(\left|\dfrac{\omega}{KZ}\right| \ll 1\right) \end{cases}$$

これより，各々の揺動の強度は

$$\varepsilon < 0 \ ; <|\eta|^2> = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{N^2\varepsilon^2}\right) + O\left(\dfrac{1}{N}\right) & \left(|\varepsilon| \lesssim N^{-\frac{1}{2}}\right) \\ O\left(\dfrac{1}{N}\right) + O\left(\dfrac{1}{N^{3/2}\varepsilon}\right) & \left(|\varepsilon| \gtrsim N^{-1/2}\right) \end{cases}$$

$$\varepsilon > 0 \ ; <|\eta|^2> = O\left(\frac{1}{N}\right) + O\left(\frac{\varepsilon^{1/2}}{N}\right)$$

$$<|\Theta|^2> = O\left(\frac{1}{N\varepsilon}\right)$$

となる。振幅の揺動は，引き込み相（$\varepsilon > 0$）では発散せず，また$\varepsilon < 0$で見られる発散も$O(N^{-2})$であり$|\varepsilon| = O(N^{-1/2})$までおさえられたものとなっている。更に位相に関しては，有限のεにおける発散がないことが注目される。このように抑えられた臨界揺動の理由は，先にも触れたように，Zが大きな時間スケール$O(|KZ\varepsilon|^{-1})$をもつという本系に特徴的な性質による。加えてまた，ここでの揺動は系外部から加えられたものではなく，あくまでdグループ振動子によるものである。そのため引き込み相ではその影響を受けて低周波成分の強度が非常に低くなり，更に揺動を抑えることになる。